

Joustavan matemaattisen ajattelun tukeminen yläkoulussa

Joustavaan matematiikkaan -verkkokurssien tavoite on auttaa pääsemään irti vastauskeskeisestä ilmapiiristä matematiikan tunneilla ja auttaa luomaan tilalle motivoiva, erilaisia ratkaisutapoja sekä perusteluja kunnioittava ilmapiiri. Joustava matemaattinen ajattelu tarkoittaa valmiutta pohtia erilaisia lähestymistapoja ja kykyä valita niistä tilanteeseen sopivin. Se on tärkeä taito kaikille oppilaille niin matematiikassa kuin yleisestikin elämässä.

Tässä koosteessa pääset kurkkaamaan millaisia ovat JoMa -kurssin

- joustavuustehtävät (s. 2-5),
- pedagogiset ohjeet (s. 6-7) ja
- keskustelufoorumit (s. 8).

Omassa opetuksessa kokeiltavia joustavuustehtäviä on kahdenlaisia:

- a) Vertailutehtäviä (s. 2-3)
- b) Tutkien kohti joustavuutta -tehtäviä (s. 4-5)

Vertailutehtävät ovat matalamman kynnyksen tehtäviä, jolla joustavaan matemaattiseen ajatteluun päästään helpommin käsiksi, vaikka oppilailla ja/tai opettajalla olisi vähemmän kokemusta tällaisesta lähestymistavasta. Lisäksi niiden avulla saadaan oppilaiden käsityksiä matematiikan oppimisesta hivutettua vastauskeskeisyydestä kohti päättelykeskeisyyttä. Vertailutehtäviä on kehitelty mm. Harvardin yliopiston Contrasting Cases -hankkeessa ja niiden hyödyllisyydestä matematiikan oppimisessa on paljon tutkimustietoa.

Tutkien kohti joustavuutta -tehtävät mahdollistavat paljon erilaisia lähestymistapoja, jolloin joustavaa ajattelua päästään kehittämään vertailemalla oppilaiden omia ideoita ja perusteluja. Jotkut tehtävistä tempaavat mukaansa kehittämään jopa matemaattista luovuutta ja ongelmanratkaisutaitoja.

Molempien tyyppisiä tehtäviä on tarjolla **laajalti yläkoulun matematiikan sisältöihin** siten, että jokainen pääsee kokeilemaan joustavuustehtäviä luokassaan.

Lisäksi kurssilla käsitellään tutkimustiedon pohjalta erilaisia joustavuuteen liittyviä teemoja. Näitä ovat: vastauskeskeisyys ja virheet, jumissa oleminen ja sinnikkyys, tehtävien monipuolistaminen, erilaiset ratkaisutavat ja representaatiot, käsitteellinen ymmärrys, oppilaiden vuorovaikutus ja päättelyn selittäminen sekä teknologian hyödyntäminen.

Kalle ja Leena ovat laskeneet laskun $\frac{5}{12} \cdot \frac{4}{25}$ eri tavoilla.

Kallen ”kerro osoittajat ja nimittäjät ensin keskenään” -tapa

Leenan ”supista yhteiset tekijät” -tapa

Kerron
osoittajat ja
nimittäjät
keskenään.

$$\frac{5}{12} \cdot \frac{4}{25}$$

Sitten supistan.

$$\frac{5 \cdot 4}{12 \cdot 25} = \frac{20}{300} = \frac{1}{15}$$

Vastaukseni on
tässä.

$$\frac{1}{15}$$



$$\frac{5}{12} \cdot \frac{4}{25}$$

$$\frac{\cancel{5}^1 \cdot \cancel{4}^1}{\underset{3}{\cancel{12}} \cdot \underset{5}{\cancel{25}}} = \frac{1}{3 \cdot 5}$$

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{15}$$

Supistan ensin
yhteiset tekijät.

5 on lukujen 5
ja 25 tekijä
($25 = 5 \cdot 5$). 4
on lukujen 4 ja
12 tekijä
($12 = 3 \cdot 4$).

Kerron
osoittajat ja
nimittäjät
keskenään.

Saan
vastauksen.



1. Miten Kalle ratkaisi tehtävän? Entä Leena?
2. Mitä samanlaista ja mitä erilaista heidän tavoissaan on?
3. Ensimmäiset vaiheet ovat erilaiset, mutta vastaukset silti samat. Mistä tämä johtuu?
4. Kumman tapa on mielestäsi parempi? Miksi?
5. Mitä opit tästä vertailusta?

Kalle ja Leena ovat laskeneet laskun $(6 + 5)^2$ eri tavoilla.

Kallen ”sulut ensin” -tapa

Leenan ”potenssit ensin” -tapa

Lasken
sulkeiden
sisällä olevan
yhteenlaskun.

$$(6 + 5)^2$$

$$11^2$$

$$121$$

Saan
vastauksen.

$$(6 + 5)^2$$

$$6^2 + 5^2$$

$$25 + 36$$

$$61$$

Avaan sulkeet
ja korotan
kummatkin
luvut toiseen
potenssiin.

Lasken
yhteenlaskun.

Tässä
vastaukseni.



1. Miten Kalle ratkaisi tehtävän? Entä Leena?
2. Kumman vastaus on oikein?
3. Mitä samanlaista ja mitä erilaista heidän tavoissaan on?
4. Miten virheen voisi välttää jatkossa?
5. Jokeri: Miten alla oleva kuva liittyy Kallen ja Leenan ratkaisuihin?

5	$5 \cdot 5$	$5 \cdot 6$
6	$6 \cdot 5$	$6 \cdot 6$
	5	6

6. Mitä opit tästä vertailusta?

Aitalaudan sahaaminen

Aitalautoja sahattaessa joku esitti seuraavan väitteen:

Sahattiinpa aidan pää miten vinosti tahansa, kulmien α ja β yhteenlaskettu suuruus on aina sama.



Jaana, Matti, Liisa ja Pekka perustelivat väitettä eritavoin.

Jaana	Matti
Liisa	Pekka

Kenen esittämä kuva perustelee parhaiten väitteen? Miksi tämä on hyvä perustelu väitteelle? Selittäkää omin sanoin ja kuvin tyhjälle paperille.

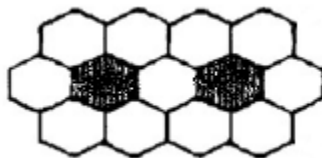
Laatoitus

Nimet: _____

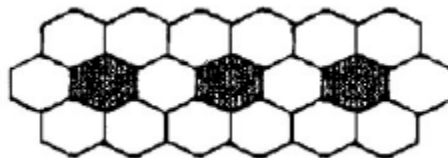
Mustista ja valkoisista laatoista rakennetaan laatoitus suoraan riviin:



1 musta laatta



2 mustaa laattaa



3 mustaa laattaa

1. Kuinka monta valkoista laattaa tarvittaisiin laatoitukseen, jossa olisi 100 mustaa laattaa? Perustelkaa.

2. Muodostakaa sääntö, jolla voidaan laskea valkoisten laattojen määrä, kun mustien laattojen lukumäärä tiedetään. Perustelkaa.

Opettajalle

Tehtävä johdattaa funktion säännön muodostamiseen ja muuttujan käyttöön. Tämä versio sopii johdannoksi aiheeseen eikä oppilaan ole pakko käyttää muuttujaa. Tehtävästä on myös versio, jossa kysytään lauseketta minkä tahansa säännön sijaan.

Ehdotus tunnin rakenteesta:

- Alustusvaihe (n. 5 min)
 - o Korostetaan, että säännöt saa esittää ihan niin kuin haluaa kunhan ne ovat ymmärrettävissä.
- Ryhmätyövaihe (n. 15 min)
 - o Ratkaisut tehdään A3-paperille.
 - o Joitain kysymysideoita:
 - Miten laskisitte palat nopeasti tästä kuvasta? Ei siis yksitellen, vaan jotenkin kätevästi.
 - Mistä keksitte tuon laskun? Mitä se tarkoittaa kuvassa?
 - Montako palaa tässä rivissä on? (Ohjaa jo voimakkaammin.)
 - Entä, jos kyseessä onkin joku muu kuvio, kuten 200. kuvio tai mikä vain?
 - Miten sanoisitte sen omin sanoin? Ei tarvitse käyttää matematiikkaa.
- Julistenäyttely (n. 5 min)
 - o Ryhmät kiertävät katsomassa muiden ryhmien tulokset ja varautuvat loppukeskustelussa kommentoimaan muiden piirroksia. Kukin ryhmä joutuu esittämään ainakin yhden kommentin.
- Loppukeskustelu (n. 15 min)
 - o Myös mielipide-erot ovat sallittuja ja toivottavia: Jollekin yhden säännön logiikka vain on parempi ja toinen tykkää toisesta. Näissäkin voi perustella, miksi toisen säännön logiikka aukeaa helpommin tai on muuten parempi.
 - o Aivan lopuksi opettaja voi lanseerata muuttujan x käytön, jos oppilaat eivät sitä käyttäneet. Jonkin sanallisen säännön voi esittää muuttujaa x käyttäen.

Ratkaisuista:

1. TAPA 1: Ylärivissä on 200 valkoista, samoin alarivissä. Keskellä on 101 valkoista. Siis yhteensä $200 + 200 + 101 = 501$.

TAPA 2: Jokaisen mustan ympärillä on 5 valkoista sekä yksi päässä. $\rightarrow 100 \cdot 5 + 1 = 501$.

TAPA 3: 1. mustan laatan ympärillä on 6 valkoista. Muiden mustien ympärillä on 5 valkoista. Siis yhteensä $6 + 99 \cdot 5$. Tämän voi laskea kätevämmän näin: $6 + 100 \cdot 5 - 5 = 501$.

TAPA 4: Jokaisen mustan ympärillä on 6, mutta silloin tulee 99 laattaa kahteen kertaan. Siis yhteensä $100 \cdot 6 - 99 = 501$.

2. Esimerkiksi:

" $2 \cdot \text{mustat} + 2 \cdot \text{mustat} + \text{mustat} + 1$ "

" $m \cdot 5 + 1$ "

" $6 + (\text{mustat} - 1) \cdot 5$ " tai sekavammin ilman sulkeita " $6 + \text{musta} - 1 \cdot 5$ "

" $\text{mustat} \cdot 6 - (\text{musta} - 1)$ "

Viisi askelta rakentavien keskustelujen virittämiseen

Smithin ja Steinin vaiheistus rakentavien koko luokan keskustelujen virittämiseen.

1 Ennakointi (Anticipating)

- Ratkaise tehtävä itse ja ennakoi oppilaan näkökulmaa.
- Millaisia ongelmia oppilaat kohtaavat?
- Millaisia tuotoksia oppilailta todennäköisesti syntyy?
- Mitkä kysymykset ja tehtävät vievät parhaiten matemaattisten pohdintojen äärelle?

2 Tarkkailu (Monitoring)

- Kuuntele, tarkkaile, tunnista keskeisiä ratkaisutapoja.
- Pysy kärryillä oppijoiden lähestymistavoista.
- Kysy kysymyksiä auttaaksesi ja syventääksesi pohdintoja.

3 Valinta (Selecting)

- RATKAISEVA VAIHE - Mitä haluat korostaa?
- Valikoi siten, että matemaattiset ideat pääsevät kehittymään.

4 Järjestäminen (Sequencing)

- Missä järjestyksessä haluat ottaa esille oppijoiden tuotoksia?
- Yleisimmin esille noussut asia? Väärinkäsitykset ensin?
- Miten oppijat jakavat työnsä? Suullisesti? Taululla? Dokumenttikameralla?

5 Koonti (Connecting)

- Kiinnitä huomio sopivilla kysymyksillä olennaisiin ideoihin.
- Vertailkaa oppijoiden tuotoksia. Miten ne suhtautuvat matemaattisesti toisiinsa?
- Miten aiheet liittyvät aiemmin opittuun? Mitä tästä voi oppia tulevaa varten?

Koonnissa varmistetaan yhteisymmärrys keskeisistä käsitteistä, vertaillaan erilaisia ratkaisutapoja (myös virheellisiä), luodaan yhteyksiä aiemmin opittuun ja pohditaan työskentelyn aikana heränneitä kysymyksiä. Kun oppijat ovat vertaisilleen vastuussa omasta työskentelystään, heidän täytyy ottaa aktiivisempi rooli matematiikan pohdintaan. Syvällisen käsitteellisen ymmärryksen on todettu muodostuvan vuorovaikutuksessa.

Lue lisää ja perehdy konkreettiseen esimerkkiin lukemalla Margaret Smithin esitys:

<https://drive.google.com/file/d/0BwtLKBmE9AYBU1U3YnFwZnFiT00/view?usp=sharing>

Lähde: *Practices for Orchestrating Productive Math Discussions*, M. S. Smith & M. K. Stein, NCTM & Corwin Press, 2011, <http://www.mctm.org/mespa/5Practices.pdf>



01/14/2019 06:06 PM

Viimeaikoina erityisesti prosenttilaskennassa, ja erityisesti prosenttilaskennan sanallisissa tehtävissä on tullut vastaan erilaisia oikeita ratkaisutapoja. Osa ratkaisutavoista on ollut myös erilaisia kuin mitä oppitunneilla on yhteisesti käsitelty. Ehkä prosenttilaskennan tehtävien käytännönläheisyys auttaa keksimään vaihtoehtoisia erilaisia ratkaisumenetelmiä eri ongelmiin.

Joustamattomuutta tulee vastaan useammin. Esimerkiksi vaihtoehtoisia ratkaisutapoja esitellessäni jotkut oppilaat eivät niitä mielellään halua kuunnella, sillä he pelkäävät näiden vaihtoehtoisten ratkaisujen sekoittavan heitä.

01/14/2019 08:22 PM

Itsekin olen törmännyt tähän, että eri tapoja ei saisi esittää. Oppilaiden mielestä se on "sekavaa opetusta".

01/14/2019 08:55 PM

Tämä "vain yhden tavan opettaminen" on oppilailla yleensä aina odotuksena. He haluavat yleensä mallin, jonka voivat opetella ulkoa ymmärtämättä asiaa.

Tästä ajattelumallista päästään kyllä eroon kunhan tarpeeksi kauan harjoitellaan keskustelemaan eri tavoista ratkaista tehtäviä. Pikkuhiljaa luokkaan tulee jo innokasta keskustelua, miten juuri minä ajattelin tehtävän ratkaisuvaiheet.

01/15/2019 09:49 AM

Tämä liittyy mielestäni vahvasti oppilaiden matematiikkakuvaan, joka on muotoutunut vuosien aikana, esim. seuraavia ajatuksia on usein:

- matematiikka on sääntöjä, jotka pitää opetella ulkoa (ei ymmärtää)
- säännöt ovat erillisiä toisistaan
- matematiikassa vastaus ratkaisee, välivaiheet ovat turhia
- matematiikassa on yksi oikea ratkaisutapa
- opettaja opettaa asian
- matematiikka osataan tai ei osata



01/14/2019 06:03 PM

Ongelmanratkaiseminen on yleensä tarkoitettu näyttämään yhtälön ratkaisemisen hyödyt, mutta usein on oppilaita, jotka perustelevat tehtävän muuten. Tällainen perustelu voi ensisilmäyksellä vaikuttaa väärältä, mutta kun oppilas selittää laskunsa, huomaa hyvän, oikean idean.

01/15/2019 12:57 PM

Toisenlaisen perustelun saaminen kirjoitettuun asuun voi olla oppilaiden mielestä uutta. Olen yrittänyt sanoa, että ratkaisun joukkoon on hyvä lisätä muutamia sanoja. Näin on helpompi myöhemmin muistella miten on ajatellut.

01/16/2019 05:22 PM

n kommentti toimii myös omissa ryhmissäni.

01/16/2019 06:48 PM

Monesti tuntuu siltä, että yhtälöiden opettaminen tuhoaa opiskelijoiden luontaisen päättelykyvyn. Kun kyseessä on ensimmäisen asteen yhtälö, yhtälöpari.

[Kommentoi](#)