Joustavan matemaattisen ajattelun tukeminen lukiossa

Joustavaan matematiikkaan -verkkokurssien tavoite on auttaa pääsemään irti vastauskeskeisestä ilmapiiristä matematiikan tunneilla ja auttaa luomaan tilalle motivoiva, erilaisia ratkaisutapoja sekä perusteluja kunnioittava ilmapiiri. Joustava matemaattinen ajattelu tarkoittaa valmiutta pohtia erilaisia lähestymistapoja ja kykyä valita niistä tilanteeseen sopivin. Se on tärkeä taito kaikille oppilaille niin matematiikassa kuin yleisestikin elämässä.

Tässä koosteessa pääset kurkkaamaan millaisia ovat JoMa -kurssin

- joustavuustehtävät (s. 2-5),
- pedagogiset ohjeet (s. 6) ja
- keskustelufoorumit (s. 7).

Omassa opetuksessa kokeiltavia joustavuustehtäviä on kahdenlaisia:

a) Vertailutehtäviä (s. 2-3)
b) Tutkien kohti joustavuutta -tehtäviä (s. 4-5)

Vertailutehtävät ovat matalamman kynnyksen tehtäviä, jolla joustavaan matemaattiseen ajatteluun päästään helpommin käsiksi, vaikka oppilailla ja/tai opettajalla olisi vähemmän kokemusta tällaisesta lähestymistavasta. Lisäksi niiden avulla saadaan oppilaiden käsityksiä matematiikan oppimisesta hivutettua vastauskeskeisyydestä kohti päättelykeskeisyyttä. Vertailutehtäviä on kehitelty mm. Harvardin yliopiston Contrasting Cases -hankkeessa ja niiden hyödyllisyydestä matematiikan oppimisessa on paljon tutkimustietoa.

Tutkien kohti joustavuutta -tehtävät mahdollistavat paljon erilaisia lähestymistapoja, jolloin joustavaa ajattelua päästään kehittämään vertailemalla oppilaiden omia ideoita ja perusteluja. Jotkut tehtävistä tempaavat mukaansa kehittämään jopa matemaattista luovuutta ja ongelmanratkaisutaitoja.

Molemman tyyppisiä tehtäviä on tarjolla **kaikkiin lukion matematiikan kursseihin**, jotta jokainen pääsee kokeilemaan joustavuustehtäviä luokassaan.

Lisäksi kurssilla käsitellään tutkimustiedon pohjalta erilaisia joustavuuteen liittyviä teemoja. Näitä ovat: vastauskeskeisyys ja virheet, jumissa oleminen ja sinnikkyys, tehtävien monipuolistaminen, erilaiset ratkaisutavat ja representaatiot, käsitteellinen ymmärrys, oppilaiden vuorovaikutus ja päättelyn selittäminen sekä teknologian hyödyntäminen.

Kalle ja Leena ovat ratkaisseet seuraavan tehtävän eri tavoin: Erään tuotteen hinta nousi $10\,\%$, jolloin uudeksi hinnaksi tuli $5{,}00$ euroa. Mikä oli tuotteen alkuperäinen hinta?

Kallen ”vähensin uudesta hinnasta 10 %” -tapa

Merkitsin tuotteen alkuperäistä hintaa kirjaimella h.

$h =$ tuotteen alkuperäinen hinta euroina

Muodostin 10 prosentin vähenemistä vastaavan prosenttikertoimen.

$$\begin{aligned} 100\,\% - 10\,\% &= 90\,\% \\ &= \frac{90}{100} \\ &= 0{,}9 \end{aligned}$$

Laskin alkuperäisen hinnan h

$$h = 0{,}9 \cdot 5{,}00 = 4{,}50$$

Leenan ”mitä lukua luku 5,00 on 10 % suurempi” -tapa

Merkitsin tuotteen alkuperäistä hintaa kirjaimella h.

$h =$ tuotteen alkuperäinen hinta euroina

Muodostin 10 prosentin kasvua vastaavan prosenttikertoimen.

$$\begin{aligned} 100\,\% + 10\,\% &= 110\,\% \\ &= \frac{110}{100} \\ &= 1{,}1 \end{aligned}$$

Muodostin yhtälön, ratkaisin siitä alkuperäisen hinnan h ja pyöristin tuloksen sentin tarkkuuteen.

$$\begin{aligned} 1{,}1h &= 5{,}00 \\ h &= \frac{5{,}00}{1{,}1} \\ &= 4{,}545454\ldots \\ &\approx 4{,}54 \end{aligned}$$

1. Miten Kalle ratkaisi tehtävän? Entä Leena?
2. Mitä samanlaista ja mitä erilaista heidän tavoissaan on?
3. Kumman ratkaisu on oikein? Miksi?
4. Millaiselle tehtävälle edellä ollut väärä ratkaisutapa toimisi?
5. Mitä opit tästä vertailusta?

Laatinut: Topi Törmä, Oulun yliopisto

Kalle ja Leena ovat laskeneet integraalin $\int (x+2)^2 dx$ eri tavoilla.

Kallen ”integrointi suoraan” -tapa

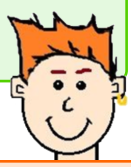
Koska sisäfunktion $(x+2)$ derivaatta on 1, integroin suoraan

$$\int (x+2)^2\ dx$$
$$=\frac{1}{3}(x+2)^3 + B$$

Laskin binomin kuution ja sievensin.

$$=\frac{1}{3}(x^3+6x^2+12x+8)+B$$
$$=\frac{1}{3}x^3+2x^2+4x+\frac{8}{3}+B,$$

missä B on vakio



Leenan ”sulut auki” -tapa

$$\int (x+2)^2\ dx$$
$$=\int x^2+4x+4\ dx$$

Avasin binomin neliön.

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{4x^2}{2}+4x+B$$

Laskin integraalin.

$$=\frac{x^3}{3}+2x^2+4x+B$$

missä B on vakio

Sievensin.

1. Miten Kalle ratkaisi tehtävän? Entä Leena?
2. Mitä samanlaista ja mitä erilaista heidän tavoissaan on?
3. Miten Kalle sievensi binomin kuution?
4. Miksi Kalle ja Leena saivat eri vastaukset? Ovatko molemmat oikein?
5. Miksi integraalifunktion loppuun lisätään vakio?
6. Mitä opit tästä vertailusta?

Laatinut: Emilia Sainio, Kokkolan aikuislukio; Topi Törmä, Oulun yliopisto

Väitteitä lukujonoista.

Merkitse ovatko väitteet aina totta (A), joskus totta (J) vai ei koskaan totta (E).

a) ”Geometrinen lukujono on vähenevä.”

b) ”Lukujono voi olla aritmeettinen ja geometrinen.”

c) ”Lukujono on joko aritmeettinen tai geometrinen.”

d) ”Lukujonon $(1, 4, 7, 10, ...)$ yleinen termi on $n + 3$.”

e) ”Lukujono on funktio.”

f) ”Lukujonot ovat joko kasvavia tai väheneviä."

g) ”Lukujonot noudattavat jotain kaavaa.”

Tehtävän laatinut: Sami Määttä, Oulun yliopisto

Numeroiden ja operaatioiden tutkimista

1. Muodosta luku **2020** käyttämällä eri laskuoperaatioita (yhteen-, vähennys-, kerto-, jakolasku ja potenssi) siten, että käytät kutakin numeroa 0-9 vain kerran.

2. Mikä on pienin määrä numeroita, että se onnistuu?

⋆ Käytä **jokaista** numeroa kerran.

Tehtävän laatinut: Sami Määttä, Oulun yliopisto

Viisi askelta rakentavien keskustelujen virittämiseen

Smithin ja Steinin vaiheistus rakentavien koko luokan keskustelujen virittämiseen.

1 Ennakointi (Anticipating)

- Ratkaise tehtävä itse ja ennakoi oppilaan näkökulmaa.
- Millaisia ongelmia oppilaat kohtaavat?
- Millaisia tuotoksia oppilailta todennäköisesti syntyy?
- Mitkä kysymykset ja tehtävät vievät parhaiten matemaattisten pohdintojen äärelle?

2 Tarkkailu (Monitoring)

- Kuuntele, tarkkaile, tunnista keskeisiä ratkaisutapoja.
- Pysy kärryillä oppijoiden lähestymistavoista.
- Kysy kysymyksiä auttaaksesi ja syventääksesi pohdintoja.

3 Valinta (Selecting)

- RATKAISEVA VAIHE - Mitä haluat korostaa?
- Valikoi siten, että matemaattiset ideat pääsevät kehittymään.

4 Järjestäminen (Sequencing)

- Missä järjestyksessä haluat ottaa esille oppijoiden tuotoksia?
- Yleisimmin esille noussut asia? Väärinkäsitykset ensin?
- Miten oppijat jakavat työnsä? Suullisesti? Taululla? Dokumenttikameralla?

5 Koonti (Connecting)

- Kiinnitä huomio sopivilla kysymyksillä olennaisiin ideoihin.
- Vertailkaa oppijoiden tuotoksia. Miten ne suhtautuvat matemaattisesti toisiinsa?
- Miten aiheet liittyvät aiemmin opittuun? Mitä tästä voi oppia tulevaa varten?

Koonnissa varmistetaan yhteisymmärrys keskeisistä käsitteistä, vertaillaan erilaisia ratkaisutapoja (myös virheellisiä), luodaan yhteyksiä aiemmin opittuun ja pohditaan työskentelyn aikana heränneitä kysymyksiä. Kun oppijat ovat vertaisilleen vastuussa omasta työskentelystään, heidän täytyy ottaa aktiivisempi rooli matematiikan pohdintaan. Syvällisen käsitteellisen ymmärryksen on todettu muodostuvan vuorovaikutuksessa.

Lue lisää ja perehdy konkreettiseen esimerkkiin lukemalla Margaret Smithin esitys:
https://drive.google.com/file/d/0BwtLKBmE9AYBU1U3YnFwZnFiT00/view?usp=sharing

Lähde: *Practices for Orchestrating Productive Math Discussions*, M. S. Smith & M. K. Stein, NCTM & Corwin Press, 2011, http://www.mctm.org/mespa/5Practices.pdf [redacted] 01/14/2019 06:06 PM

Viimeaikoina erityisesti prosenttilaskennassa, ja erityisesti prosenttilaskennan sanallisissa tehtävissä on tullut vastaan erilaisia oikeita ratkaisutapoja. Osa ratkaisutavoista on ollut myös erilaisia kuin mitä oppitunneilla on yhteisesti käsitelty. Ehkä prosenttilaskennan tehtävien käytännönläheisyys auttaa keksimään vaihtoehtoisia erilaisia ratkaisumenetelmiö eri ongelmiin.

Joustamattomuutta tulee vastaan useammin. Esimerkiksi vaihtoehtoisia ratkaisutapoja esitellessäni jotkut oppilaat eivät niitä mielellään halua kuunnella, sillä he pelkäävät näiden vaihtoehtoisten ratkaisujen sekoittavan heitä.

[redacted] 01/14/2019 08:22 PM

Itsekin olen törmännyt tähän, että eri tapoja ei saisi esittää. Oppilaiden mielestä se on "sekavaa opetusta".

[redacted] 01/14/2019 08:55 PM

Tämä "vain yhden tavan opettaminen" on oppilailla yleensä aina odotuksena. He haluavat yleensä mallin, jonka voivat opetella ulkoa ymmärtämättä asiaa.
Tästä ajattelumallista päästään kyllä eroon kunhan tarpeeksi kauan harjoitellaan keskustelemaan eri tavoista ratkaista tehtäviä. Pikkuhiljaa luokkaan tulee jo innokasta keskustelua, miten juuri minä ajattelin tehtävän ratkaisuvaiheet.

[redacted] 01/15/2019 09:49 AM

Tämä liittyy mielestäni vahvasti oppilaiden matematiikkakuvaan, joka on muotoutunut vuosien aikana, esim. seuraavia ajatuksia on usein:

- matematiikka on sääntöjä, jotka pitää opetella ulkoa (ei ymmärtää)
- säännöt ovat erillisiä toisistaan
- matematiikassa vastaus ratkaisee, välivaiheet ovat turhia
- matematiikassa on yksi oikea ratkaisutapa
- opettaja opettaa asian
- matematiikka osataan tai ei osata

[redacted] 01/14/2019 06:03 PM

Ongelmanratkaiseminen on yleensä tarkoitettu näyttämään yhtälön ratkaisemisen hyödyt, mutta usein on oppilaita, jotka perustelevat tehtävän muuten. Tällainen perustelu voi ensisilmäyksellä vaikuttaa väärältä, mutta kun oppilas selittää laskunsa, huomaa hyvän, oikean idean.

[redacted] 01/15/2019 12:57 PM

Toisenlaisen perustelun saaminen kirjoitettuun asuun voi olla oppilaiden mielestä uutta. Olen yrittänyt sanoa, että ratkaisun joukkoon on hyvä lisätä muutamia sanoja. Näin on helpompi myöhemmin muistella miten on ajatellut.

[redacted] 01/16/2019 05:22 PM

[redacted]n kommnetti toimii myös omissa ryhmissäni.

[redacted] 01/16/2019 06:48 PM

Monesti tuntuu siltä, että yhtälöiden opettaminen tuhoaa opiskelijoiden luontaisen päättelykyvyn. Kun kyseessä on ensimmäisen asteen yhtälö, yhtälöpari.

Kommentoi