

Att stödja flexibelt matematiskt tänkande i högstadiet och gymnasiet

Målet med nätkurserna i flexibel matematik är att hjälpa till att avsluta den svarsfokuserade atmosfären på matematiklektionerna och att i stället skapa en motiverande miljö som respekterar olika lösningsmetoder och motiveringar. Flexibelt matematiskt tänkande innebär beredskap att överväga olika tillvägagångssätt och förmåga att välja det som är mest lämpligt för situationen. Det är en viktig färdighet för alla elever, både i matematik och i livet i allmänhet.

I den här sammanställningen får du en inblick i JoMa-kursens

- Flexibilitetsuppgifter (s. 2-9)
 - Gymnasiets jämförelseuppgifter (s. 2-3) och Mot flexibilitet via undersökning - uppgifter (s. 4-5)
 - Högstadiets jämförelseuppgifter (s. 6-7) och argumentationsuppgifter (s. 8-9)
- Pedagogiska instruktioner (s. 10-11).

Jämförelseuppgifter är uppgifter med lägre tröskel, vilket gör det lättare att bekanta sig med flexibelt matematiskt tänkande även om eleverna och/eller läraren har mindre erfarenhet av detta tillvägagångssätt. Dessutom bidrar de till att gradvis föra elevernas syn på matematiklärande från ett svarsfokuserat till ett resonemangsfokuserat perspektiv. Jämförelseuppgifter har utvecklats bland annat inom Harvard universitetets projekt *Contrasting Cases*, och det finns mycket forskning som visar deras nytta i matematiklärande.

Argumentations- och Mot flexibilitet via undersökning -uppgifter möjliggör många olika tillvägagångssätt, vilket gör att flexibelt tänkande kan utvecklas genom att jämföra elevernas egna idéer och motiveringar. Vissa uppgifter inspirerar till och med till att utveckla matematisk kreativitet och problemlösningsförmåga.

Båda typerna av uppgifter finns tillgängliga för **nästan alla områden inom högstadiets och gymnasiets matematik**, så att alla har möjlighet att använda flexibilitetsuppgifter i sin undervisning.

Dessutom behandlas på kursen olika teman som är baserade på forskning och är kopplade till flexibilitet. Dessa är: svarsfokusering och fel, att fastna och uthållighet, variation i uppgifter, olika lösningsmetoder och representationer, begreppslig förståelse, elevers interaktion och förklaring av resonemang samt användning av teknologi.

Kalle och Leena har löst följande uppgift på olika sätt: En produkts pris ökade med 10 %, dess nya pris är 5,00 euro. Vad är produktens ursprungliga pris?

Kalles ”Jag minskade det nya priset med 10 %” -sätt

Leenas ”vilket tal blir 5,00 när det ökas med 10 %” -sätt

Jag betecknar produktens ursprungliga pris med h .

Jag konstruerar en procentfaktor som motsvarar en minskning på 10 procent.

Jag räknar det ursprungliga priset h

h = produktens ursprungliga pris i euro

$$\begin{aligned} 100 \% - 10 \% &= 90 \% \\ &= \frac{90}{100} \\ &= 0,9 \end{aligned}$$

$$h = 0,9 \cdot 5,00 = 4,50$$

h = produktens ursprungliga pris i euro

$$\begin{aligned} 100 \% + 10 \% &= 110 \% \\ &= \frac{110}{100} \\ &= 1,1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1,1h &= 5,00 \\ h &= \frac{5,00}{1,1} \\ &= 4,545454 \dots \\ &\approx 4,54 \end{aligned}$$

Jag betecknar produktens ursprungliga pris med h .

Jag konstruerar en procentfaktor som motsvarar en ökning på 10 procent.

Jag konstruerar en ekvation, löser från den det ursprungliga priset h och avrundar svaret till en centimeters noggrannhet.



1. Hur löste Kalle uppgiften? Hur gjorde Leena?
2. Vilka skillnader och likheter finns det i deras metoder?
3. Vems lösning är rätt? Varför?
4. Hurdan uppgift kunde man lösa med den metoden som var fel i detta fall?
5. Vad lärde du dig av denna jämförelse?

Kalle och Leena har beräknat integralen $\int (x+2)^2 dx$ på olika sätt.

Kalles ”integrera direkt” -sätt

Eftersom derivatan av inre funktionen $(x+2)$ är 1, så integrerar jag direkt.

Jag räknade kuben av binomet och förenklade.



$$\int (x+2)^2 dx = \frac{1}{3}(x+2)^3 + B$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3}(x^3 + 6x^2 + 12x + 8) + B \\ &= \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 4x + \frac{8}{3} + B, \end{aligned}$$

missä B on vakio

Leenas ”parentesen först” -sätt

$$\begin{aligned} &\int (x+2)^2 dx \\ &= \int x^2 + 4x + 4 dx \end{aligned}$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} + 4x + B$$

$$= \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 4x + B$$

missä B on vakio

Jag räknade kvadraten av binomet.

Jag beräknade integralen.

Jag förenklade.



1. Hur löste Kalle uppgiften? Hur gjorde Leena?
2. Vilka likheter och skillnader finns i deras metoder?
3. Hur förenklade Kalle kuben av binomet?
4. Varför fick Kalle och Leena olika svar? Är båda lösningarna rätt?
5. Varför lägger man till en konstant vid slutet av primitiva funktionen?
6. Vad lärde du dig av denna jämförelse?

Påståenden om talföljder.

Är följande påståenden alltid sanna (A), ibland sanna (J) eller aldrig sanna (E)? Motivera dina svar!

- a) "En aritmetisk talföljd är växande."
- b) "En geometrisk talföljd är växande eller avtagande."
- c) "En talföljd är aritmetisk eller geometrisk."
- d) "Om kvoten i en geometrisk talföljd är större än 1, så är talföljden också aritmetisk."
- e) "Om den allmänna termen för en aritmetisk talföljd är a_n , så är även talföljden med allmänna termen $2a_n$ aritmetisk."
- f) "En talföljd är en funktion."

Uttryck talet 2020

Bilda talet **2020** genom att använda addition, subtraktion, multiplikation, division och potenser, så att du använder varje siffra 0-9 högst en gång.

1. Kan du komma på flera olika sätt?
2. Vilket är det minsta antalet siffror med vilket du kan lösa uppgiften?
3. Extra uppgift: Använd **varje** siffra exakt en gång.

Kalle och Leena har förenklat uttrycket $\frac{7}{12} \cdot \frac{4}{21}$ på olika sätt.

Kalles metod: "multiplicera först täljarna och nämnarna sinsemellan"

Leenas metod: "förkorta med gemensamma faktorer"

Jag multiplicera täljarna och nämnarna sinsemellan.

Sedan förkortar jag. 28 är en faktor till talen 28 och 252 ($252 = 9 \cdot 28$).

Jag får lösningen $\frac{1}{9}$.

$$\frac{7}{12} \cdot \frac{4}{21} = \frac{7 \cdot 4}{12 \cdot 21} = \frac{28}{252}$$

$$= \frac{1}{9}$$

$$= \frac{1}{9}$$



$$\frac{7}{12} \cdot \frac{4}{21} = \frac{\overset{1}{\cancel{7}}}{\underset{3}{\cancel{12}}} \cdot \frac{\overset{1}{\cancel{4}}}{\underset{3}{\cancel{21}}}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 1}{3 \cdot 3}$$

$$= \frac{1}{9}$$

Jag förkortar med gemensamma faktorer. 7 är en faktor till talen 7 och 21 ($21 = 3 \cdot 7$). 4 är en faktor till talen 4 och 12 ($12 = 3 \cdot 4$).

Jag multiplicerar täljarna och nämnarna sinsemellan.

Jag får lösningen $\frac{1}{9}$.



1. Hur löste Kalle uppgiften? Hur löste Leena uppgiften?
2. Vilka likheter och skillnader hittas i deras lösningssätt?
3. De första stegen är olika, men svaren blir ändå samma. Varför är det så?
4. Vems metod tycker du att är bättre? Varför?
5. Vad lärde du dig av denna jämförelse?

Kalle och Leena har räknat $(5 + 6)^2$ på olika sätt.

Kalles metod: "parenteserna först"

Leenas metod "potenserna först"

Jag adderar
talen inuti
parentesen.

$$(5 + 6)^2$$

$$= 11^2$$

$$= 121$$

Här är mitt
svar.



$$(5 + 6)^2$$

$$= 5^2 + 6^2$$

$$= 25 + 36$$

$$= 61$$

Jag upphöjer
båda talen inuti
parentesen med
två.

Jag adderar.

Här är mitt
svar.



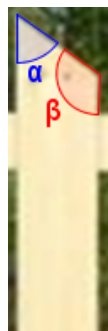
1. Hur löste Kalle uppgiften? Hur löste Leena uppgiften?
2. Vems lösning är rätt?
3. Vilka likheter och skillnader hittas mellan deras lösningssätt?
4. Hur kan felet undvikas i fortsättningen?
5. Joker: Hur hänger bilden nedan ihop med Kalles och Leenas lösningar?

5	$5 \cdot 5$	$5 \cdot 6$
6	$6 \cdot 5$	$6 \cdot 6$
	5	6

6. Vad lärde du dig av denna jämförelse?

Att såga en bräda för staket

När man sågade brädor för att bygga ett staket framförde någon följande påstående:
Oavsett hur snett brädans topp sågas av, är summan av vinklarna α och β alltid densamma.



Jaana, Matti, Liisa och Pekka motiverade påståendet på olika sätt

Jaana	Matti
Liisa	Pekka

Vems illustration motiverar påståendet bäst? Varför är detta en bra motivering för påståendet? Förklara med egna ord och bilder på ett tomt papper.

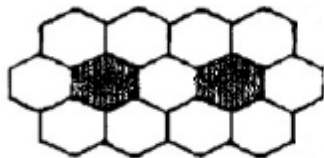
Kakelläggning

Namn: _____

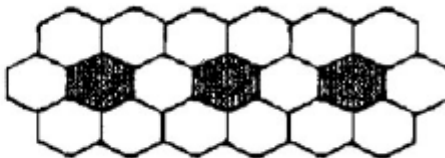
Man bygger en kakelfigur av svarta och vita kakel:



1 svart kakel



2 svarta kakel



3 svarta kakel

- a) Skriv en uträkning som ger antalet vita kakel när antalet svarta kakel är 100. Motivera.

- b) Skriv en uträkning som ger antalet vita kakel när antalet svarta kakel är x . Motivera.

För läraren

Förslag på lektionsstruktur:

Inledning (ca 5 min):

Här är det bra att betona att det är arbetsamt att räkna kaklen en för en och att man borde hitta ett effektivare sätt. Det finns många olika sätt att tänka rätt.

Grupparbete (ca 15 min):

Grupper på cirka 3 personer.

Avslutande diskussion (ca 15 min):

Läraren väljer ut de lösningar som ska behandlas. Om möjligt, välj grupper som har använt olika sätt att tänka.

Om alla grupper har samma tankesätt kan läraren själv presentera ett annat uttryck och be eleverna att ge sin åsikt om det.

Vid en passlig tidpunkt kan läraren lyfta fram att olika grupper uttryck ser väldigt olika ut och fundera på om de båda är rätt. Tanken är att eleverna skulle föreslå förkortning.

Om lösningarna:

SÄTT 1: I den övre raden finns det 200 vita kakel, och i den nedre raden finns det lika många. I mitten finns 101 vita kakel. Totalt: $200 + 200 + 101 = 501$.

SÄTT 2: Varje svarta kakel omges av 5 vita, samt en extra på ändan.
 $\rightarrow 100 \cdot 5 + 1 = 501$

SÄTT 3: Det första svarta kaklet omges av 6 vita. Vart och ett av de övriga 99 omges av 5 vita kakel.
Totalt: $6 + 99 \cdot 5$.
Detta kan också beräknas så här: $6 + 100 \cdot 5 - 5 = 501$

SÄTT 4: Varje svarta kakel omges av 6 vita, men då räknas 99 kakel dubbelt.
 $\rightarrow 100 \cdot 6 - 99 = 501$

2. Till exempel:

$$2x + 2x + (x + 1)$$

$$5x + 1$$

$$6 + (x - 1) \cdot 5$$

$$x \cdot 6 - (x - 1)$$

Fem steg för att skapa konstruktiva diskussioner

Smiths och Steins stegvisa modell för att skapa konstruktiva klassdiskussioner.

1. Förutseende (Anticipating)

- Lös uppgiften själv och förutse uppgiften ur elevens perspektiv.
- Vilka problem kan eleverna stöta på?
- Vilka typer av lösningar kommer eleverna troligen att producera?
- Vilka frågor och uppgifter främjar matematiska resonemang?

2. Observation (Monitoring)

- Lyssna, observera och identifiera centrala lösningsmetoder.
- Håll koll på elevernas tillvägagångssätt.
- Ställ frågor för att hjälpa och fördjupa resonemangen.

3. Val (Selecting)

- AVGÖRANDE STEG – Vad vill du lyfta fram?
- Välj på ett sätt som gör att de matematiska idéerna kan utvecklas.

4. Organisering (Sequencing)

- I vilken ordning vill du ta upp elevernas arbeten?
- Det som kommit upp oftast? Missförstånden först?
- Hur ska eleverna dela sitt arbete? Muntligt? På tavlan? Med dokumentkamera?

5. Sammanställning (Connecting)

- Rikta uppmärksamheten med lämpliga frågor mot de centrala idéerna.
- Jämför elevernas arbeten. Hur förhåller de sig matematiskt till varandra?
- Hur hänger ämnena ihop med tidigare kunskaper? Vad kan vi lära oss för framtiden?

I sammanställningen säkerställs en gemensam förståelse för centrala begrepp, man jämför olika lösningsmetoder (även felaktiga), skapar kopplingar till tidigare kunskaper och reflekterar över frågor som väckts under arbetet. När eleverna hålls ansvariga inför sina kamrater för sitt eget arbete måste de ta en mer aktiv roll i det matematiska resonemanget. Djup konceptuell förståelse har visat sig utvecklas i interaktion.

Läs mer och fördjupa dig i ett konkret exempel genom att läsa Margaret Smiths presentation:

<https://drive.google.com/file/d/0BwtLKBmE9AYBU1U3YnFwZnFiT00/view?usp=sharing>

Källa: *Practices for Orchestrating Productive Math Discussions*, M. S. Smith & M. K. Stein, NCTM & Corwin Press, 2011, <http://www.mctm.org/mespa/5Practices.pdf>